Proceedings of the 37th Chinese Control Conference
July 25-27, 2018, Wuhan, China

基于最小二乘法的社会网络辨识

董艳萍[1,2], 邢昱[1,2], 赵文虓[1,2]
1. 中国科学院数学与系统科学研究院,系统控制重点实验室, 北京 100190
2. 中国科学院大学, 数学科学学院, 北京 100049
E-mail: dongyanping15@mails.ucas.ac.cn
E-mail: xingyu15@mails.ucas.ac.cn
E-mail: wxzhao@amss.ac.cn

摘 要: 近年来, 社会网络系统的辨识问题吸引了越来越多研究者的关注. 本文的工作基于French-DeGroot模型展开. 我们假设社会网络中存在若干信息源, 他们会对网络中其他个体产生影响, 但不会受到外界影响. 由于模型的线性性质, 本文采用最小二乘法来估计个体间相互影响的系数矩阵. 我们证明了系数矩阵辨识算法的强一致性, 即系数矩阵的估计值几乎处处收敛到真实矩阵. 本文的方法只需要跟踪和记录社会网络中的个体对某一话题所持观点随时间的演变过程, 这丰富了现有的社会网络辨识算法.

关键词: 最小二乘法, 社会网络, 系数矩阵辨识

The Identification of Social Networks by The Least-Square Algorithm

Yanping Dong[1,2], YuXing[1,2], Wenxiao Zhao[1,2]
1. Key Laboratory of Systems and Control, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, P. R. China
2. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P. R. China
E-mail: dongyanping15@mails.ucas.ac.cn
E-mail: xingyu15@mails.ucas.ac.cn
E-mail: wxzhao@amss.ac.cn

Abstract: In recent years, the identification of social networks systems has attracted more and more research attention. This paper is based on French-DeGroot model. We assume that there exist some information sources which can influence other agents in the social network but cannot be influenced. Since the model is linear, the least-square algorithm is applied to estimate the parameter matrix of the underlying social network. We prove the strong consistency of the algorithm, i.e. the estimate for the parameter matrix converging almost surely to the true matrix. The algorithm in this paper only need to trace and record the evolution of agents' opinions for certain topics, which enriched the existing identification algorithms for social network matrices.

Key Words: The least-square algorithm, Social network, The parameter matrix's identification

1 引言

近年来, 社会网络系统的研究受到越来越多的关注[1]. 社会网络是由若干个体及彼此之间的关系组成的网络结构. 通过这些关系, 个体可以互相影响, 从而可以产生错综复杂的社会现象. 其中, 群体观点的演化是一个很重要的问题. 为了解释其机制, 很多观点动力学模型已经被提出. 例如, French-DeGroot模型, Friedkin-Johnsen 模型等[2]. 在French-DeGroot 模型中[3], 每个个体当时的观点是他的所有邻点在前一时刻观点的加权平均. 当对应的社会网络图是强连通的时候, 所有个体最终的观点会达到一致. 为了解释群体在讨论后不能达成一致的情况, Friedkin 等人修改了French-DeGroot模型并提出了Friedkin-Johnsen模型. 在这个模型中, 个体的观点不仅受他的所有邻点在前一时刻观点的影响, 而且还受他自己的初始观点的影响[4].

在观点动力学模型中, 个体的相互影响通常用网络及其相应的系数矩阵来表示. 因此, 辨识观点动力学模型中的系数矩阵能帮助我们深入理解网络中个体间的相互影响关系, 从而有助于对群体观点走向的分析和预测. 研究者们使用不同的方法来解决网络系数矩阵的辨识问题, 例如优化方法, 压缩感知方法等[5–7]. 在参考文献[5]中, 作者假设French-DeGroot模型对应的社会网络中存在一些固执个体, 并且通过把辨识问题转化成一个盲压缩感知问题来完成辨识工作. 参考文献[6]提出了辨识Friedkin-Johnsen模型系数矩阵的一种方法. 即在系数矩阵是稀疏的假设下, 作者证明了如果满足相应的条件, 那么系数矩阵的辨识问题可以用压缩感知的方法来求解. 参考文献[7]用优化方法处理系数矩阵的辨识问题, 通过求解满足谱信息和稀疏性等条件的优化问题得到对网络系数矩阵的估计. 以上辨识方法的实现均需要观测网络中个体对多个话题的讨论并获得所有个体对不同话题的初始观点及最终观点的信息, 然而现实条件的限制可能会使这些信息不易获取. 另一方面, 上述研究的辨识工作通常需要假定社会网络的系数矩阵是稀疏的, 其辨识方法可能并不能保证估计结果是真实的系数矩阵.

本文的工作是基于French-DeGroot模型来辨识社会网络的系数矩阵. 为了能够完成辨识工作, 我们假设

此项工作得到国家自然科学基金, 项目批准号: 61573345, 及国家重点研发计划(2016YFB0901900)资助.

在社会网络中存在一些类似于固执个体的信息源, 他们可能是一些官方网站、专业媒体等会对网络中其他个体产生影响但不会受到外界影响的信息发布者. 由于存在信息源的French-DeGroot模型仍是线性的, 本文采用最小二乘法来估计社会网络的系数矩阵. 本文研究工作的优势如下：一方面, 我们只需要跟踪记录社会网络中的个体对某一话题所持观点的演化过程. 另一方面, 我们在理论上分析了算法的强一致性, 即估计结果收敛到真实的系数矩阵.

本文的结构如下: 在第2节中我们介绍一些相关的基础知识. 在第3节中, 我们介绍本文研究的观点动力学模型. 接下来, 在第4节中, 我们引入辨识系数矩阵的最小二乘法, 并从理论上证明了算法的强一致性. 在第5节中, 我们给出一个数值仿真例子. 最后我们在第6节中对本文进行总结.

2 预备知识

在本节中, 我们介绍一些必要的数学基础知识并引入相关的记号.

现实世界中的社会网络可以用拓扑图$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$来表示. 其中, $\mathcal{V} = \{1, \cdots, n\}$ 是图$\mathcal{G}$ 的节点集合, 每一个节点代表了社会网络中的一个个体. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是图$\mathcal{G}$ 的边集, 边$(i, j) \in \mathcal{E}$指个体i直接受到个体j的影响. 非负矩阵W是$\mathcal{G}$的系数矩阵, 矩阵的每个元素代表了对应的两个个体之间的影响程度, 且满足若$(i, j) \in E$, 则$w_{ij} > 0$；若$(i, j) \notin E$, 则$w_{ij} = 0$. 对于一个非负矩阵$W = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若它的所有行和都是1(即$\sum_{1 \le j \le n} w_{ij} = 1, \forall 1 \le i \le n$), 则我们称$W$是行随机的. 若它的所有行和都小于等于1(即$\sum_{1 \le j \le n} w_{ij} \le 1, \forall 1 \le i \le n$), 则我们称$W$ 是次行随机的. 在本文中, 约定图$\mathcal{G}$的系数矩阵是行随机的. 在图$\mathcal{G}$中, 由不重复边组成的序列(i_0, i_1), (i_1, i_2), $\cdots$, (i_{k-1}, i_{k-2})称为从i_0到i_k的路径, 其中, $i_0, \cdots, i_k \in \mathcal{V}$, $k \ge 1$. 如果存在一条从个体i到个体j的路径，则称i 受到j 的影响.

3 模型提出

我们在本节介绍将要研究的French-DeGroot模型. 在此模型中, 用$x_i(k) \in \mathbb{R}$表示个体i在k时刻对正在讨论的话题所持的观点, $1 \le i \le n$, $k \ge 0$. 则$X(k) = (x_1(k), \cdots, x_n(k))^{\mathrm{T}}$是群体在$k$时刻的观点向量, $k \ge 0$, 表示群体的观点. French-DeGroot模型的更新规则如下:

$$X(k+1) = WX(k),\ k = 0, 1, \cdots, \tag{1}$$

其中W是该社会网络的系数矩阵. 假设网络中存在一些信息源, 因为他们不会受到外界影响, 所以公式(1)能被写成如下的形式:

$$\begin{pmatrix} X_s(k+1) \\ X_{ns}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_s(k) \\ X_{ns}(k) \end{pmatrix}, k = 0, 1, \cdots,$$

其中, $X_s(k) \in \mathbb{R}^m$ 表示网络中的m个信息源在时刻k对正在讨论的话题所持的观点, $X_{ns}(k) \in \mathbb{R}^n$ 表示n个常规个体在时刻k所持的观点, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示常规个体之间的系数矩阵, 且D中的对角元均大于0, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$表示信息源对常规个体影响的系数矩阵. 因此常规个体的更新规则为:

$$X_{ns}(k+1) = DX_{ns}(k) + BX_s(k). \tag{2}$$

我们假设社会网络中的所有常规个体及信息源所持观点是有界的, 这也与常识相符.

4 算法和估计的强一致性

在本节, 我们使用最小二乘法来辨识线性模型(2)的系数矩阵, 并分析算法的收敛性.

4.1 最小二乘算法

本文中, 令

$$\theta^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} D & B \end{pmatrix}, \quad \varphi_k^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} X_{ns}(k)^{\mathrm{T}} & X_s(k)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

则模型可化为

$$X_{ns}(k+1) = \theta^{\mathrm{T}} \varphi_k. \tag{3}$$

令$P_{t+1} = (\sum_{i=0}^{t} \varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}})^{-1}$, 则递推最小二乘法如下:

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t - a_t P_t \varphi_t \varphi_t^{\mathrm{T}} P_t \\ a_t &= (1 + \varphi_t^{\mathrm{T}} P_t \varphi_t)^{-1} \\ \theta_{t+1} &= \theta_t + a_t P_t \varphi_t (y_{t+1} - \theta_t^{\mathrm{T}} \varphi_t). \end{aligned} \tag{4}$$

接下来, 我们分两步来证明系数矩阵的估计值几乎处处收敛到真实矩阵, 即$\theta_t \to \theta$, a.s. 第一步, 我们证明$\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}})) > ct$, a.s., 其中常数$c > 0$. 第二步, 我们证明$\lambda_{\max}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}})) = O(t)$, a.s.

4.2 估计的强一致性

针对模型(2)做如下的假设:

1) 所有常规个体都受到某一信息源的影响;

2) $\{X_s(k), k = 0, 1, \cdots\}$ 是一个独立同分布的有界序列, 且$E(X_s(0) - EX_s(0))(X_s(0) - EX_s(0))^{\mathrm{T}} \triangleq R$是正定的;

3) $A(z) \triangleq I - Dz$和Bz没有左公共因子;

4) $\begin{pmatrix} D & B \end{pmatrix}$是行满秩的,

其中, z是后退算子, 满足$zX(k) = X(k-1)$.

注释4.1. *可以验证, 假设1)可以推出D满足附录中引理2的条件, 从而D是稳定的, 即D的谱半径小于1. 反之, 若假设1)不成立, D可以写成分块下三角矩阵的形式, 并且在对角线上存在一个子块矩阵是行随机的, 从而D的谱半径等于1. 这说明, 在D的对角元均大于0的条件下, 假设1)是D稳定的充要条件.*

注释4.2. *在假设2)中, 信息源的观点是独立同分布的随机变量序列, 他们对话题所持的观点可能随着时间的变化而变化. 我们还假设他们的协方差矩阵的期望是正定的, 这意味着我们可以将他们视作激励信号来辨识社会网络的系数矩阵.*

注释4.3. *由假设1)可知矩阵D是稳定的, 因此对$|z| \le 1$, $A(z)$可逆.*

下面, 我们证明算法的强一致性. 为了后续证明的方便, 我们记$detA(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$.

定理4.1. 如果假设1)-4)成立, 那么有

$$\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})) > ct,\ a.s.,$$

其中常数$c>0$.

证明. 记$\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})) = \lambda_{\min}(t)$. 如果我们要证明$\lambda_{\min}(t)>ct$, 只要证明下面式子成立即可:

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1}\lambda_{\min}(t) > 0 \quad a.s.$$

令$f_i=(detA(z))\varphi_i$, 则

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\min}\sum_{i=0}^{t} f_i f_i^{\mathrm{T}}\\
&=\inf_{||x||=1}\sum_{i=0}^{t}(x^{\mathrm{T}}f_i)^2\\
&=\inf_{||x||=1}\sum_{i=0}^{t}[x^{\mathrm{T}}(a_0\varphi_i+\cdots+a_n\varphi_{i-n})]^2\\
&\le \inf_{||x||=1}(1+n)\sum_{i=0}^{t}x^{\mathrm{T}}(a_0^2\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}+\cdots+a_n^2\varphi_{i-n}\varphi_{i-n}^{\mathrm{T}})x\\
&\le (1+n)\inf_{||x||=1}\sum_{i=0}^{t}x^{\mathrm{T}}(a_0^2\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}+\cdots+a_n^2\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})x\\
&=(1+n)(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_n^2)\inf_{||x||=1}x^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{t}\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}x\\
&=(1+n)(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_n^2)\lambda_{min}(t)
\end{aligned}$$

由上式可知, 如果我们能够证明

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1}\lambda_{\min}\sum_{i=0}^{t} f_i f_i^{\mathrm{T}} > 0 \quad a.s., \tag{5}$$

那么就有

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1}\lambda_{\min}(t) > 0 \quad a.s.$$

下面我们用反证法证明前者成立.

若(5)是不成立的, 则存在一个子列$\{n_k\}$和一个向量序列$\{\eta_{n_k}\}$, 满足$||\eta_{n_k}||=1, \eta_{n_k}^{\mathrm{T}}=(\alpha_{n_k}^{\mathrm{T}},\beta_{n_k}^{\mathrm{T}})$, 使得

$$\liminf_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}(\eta_{n_k}^{\mathrm{T}}f_i)^2=0.$$

因为$\{\eta_{n_k}\}$是有界的, 所以存在一个收敛子列$\{\eta_{n_k}\}$(为简单起见,记为η_{n_k}), 即$\eta_{n_k}\to\eta,\ k\to\infty$. 由极限的定义, 可知$||\eta||=1, \eta^{\mathrm{T}}=(\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}})$.

令

$$\sum_{i=0}^{n} h_{n_k}^{(i)} z^i = \alpha_{n_k}^{\mathrm{T}} adjA(z)Bz + \beta_{n_k}^{\mathrm{T}} detA(z),$$

则有

$$\begin{aligned}
\eta_{n_k}^{\mathrm{T}} f_i &= \alpha_{n_k}^{\mathrm{T}} adjA(z)BX_s(i-1)+\beta_{n_k}^{\mathrm{T}} detA(z)X_s(i)\\
&=(\alpha_{n_k}^{\mathrm{T}} adjA(z)Bz+\beta_{n_k}^{\mathrm{T}} detA(z))X_s(i)\\
&=\sum_{i=0}^{n} h_{n_k}^{(i)} z^i X_s(i),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}(\eta_{n_k}^{\mathrm{T}} f_i)^2\\
&=\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n} h_{n_k}^{(j)} z^j X_s(i))^2\\
&=\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}(\sum_{j=0}^{n} h_{n_k}^{(j)} X_s(i-j))^2\\
&=\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[\sum_{j=0}^{n} h_{n_k}^{(j)}((X_s(i-j)\\
&\qquad -EX_s(i-j))+EX_s(i-j))]^2\\
&=0
\end{aligned} \tag{6}$$

上式倒数第二个等号右侧的式子展开后所得的交叉项为:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[\sum_{j=0}^{n} h_{n_k}^{(j)}(X_s(i-j)-EX_s(i-j))]\\
&[\sum_{j=0}^{n} h_{n_k}^{(j)} EX_s(i-j)]\\
&=\lim_{k\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{n} h_{n_k}^{(j_1)} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[(X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1))]\\
&[h_{n_k}^{(j_2)} EX_s(i-j_2)].
\end{aligned} \tag{7}$$

由大数定律[8]可知$n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[(X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1)]$几乎处处收敛到0. 又注意到$h_{n_k}^{(j)}, 1\le j\le n$, 是收敛序列, 故式子(7)几乎处处收敛到0. 再结合式子(6)可以得到

$$\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[\sum_{j=0}^{n} h_{n_k}^{(j)}(X_s(i-j)-EX_s(i-j))]^2=0. \tag{8}$$

式子(8)展开后交叉项可以表示成如下形式:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[h_{n_k}^{(j_1)}(X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1))]\\
&[h_{n_k}^{(j_2)}(X_s(i-j_2)-EX_s(i-j_2))].
\end{aligned}$$

其中, $0\le j_1, j_2\le n,\ j_1\ne j_2$. 根据附录中的定理1, 令定理中的$(\alpha, M_i, X_{i+1})$ 分别对应$(2, [X_s(i-j_1)-EX_s(i-$

$j_1)], [X_s(i-j_2)-EX_s(i-j_2)]^{\mathrm{T}})$, 可得:

$$\begin{aligned}
&n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[h_{n_k}^{(j_1)}(X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1))]\\
&[h_{n_k}^{(j_2)}(X_s(i-j_2)-EX_s(i-j_2))]\\
&=n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}[h_{n_k}^{(j_1)}(X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1))]\\
&[(X_s(i-j_2)-EX_s(i-j_2))^{\mathrm{T}}[h_{n_k}^{(j_2)}]^{\mathrm{T}}]\\
&=O((\sum_{i=0}^{n_k}||X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1)||^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\log^{\frac{1}{2}+\eta}(\sum_{i=0}^{n_k}||X_s(i-j_1)-EX_s(i-j_1)||^2+e))\\
&=O(n_k^{-1}(n_k)^{\frac{1}{2}}(\log n_k)^{\frac{1}{2}+\eta})\\
&=O(n_k^{-1}(n_k)^{\frac{1}{2}+\eta}),
\end{aligned}$$

其中, 第二个等式成立的原因是$\{h_{n_k}^{(j_1)}\}, \{h_{n_k}^{(j_1)}\}$是收敛序列, 从而是有界的. 由假设2)及大数定律[8]可以得到第三个等式. 因此, 式子(8)展开后的的交叉项几乎处处收敛到0. 进而,

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}h_{n_k}^{(j)}[X_s(i-j)-EX_s(i-j)]\\
&[X_s(i-j)-EX_s(i-j)]^{\mathrm{T}}[h_{n_k}^{(j)}]^{\mathrm{T}}=0,
\end{aligned}$$

其中, $1\le j\le n$. 由大数定律[8]可知, 和式

$$n_k^{-1}\sum_{i=0}^{n_k}(X_s(i-j)-EX_s(i-j))(X_s(i-j)-EX_s(i-j))^{\mathrm{T}}$$

几乎处处收敛到正定矩阵R. 因此有$h_{n_k}^{(j)}\to 0$. 进一步, 由$h_{n_k}^{(j)}$的定义, 我们有

$$\alpha^{\mathrm{T}}adjA(z)Bz+\beta^{\mathrm{T}}detA(z)=0 \tag{9}$$

根据假设3), 我们知道存在多项式$M(z), N(z)$, 使得$A(z)M(z)+zB(z)N(z)=I$ 成立. 因此

$$\begin{aligned}
\alpha^{\mathrm{T}}adjA(z)&=\alpha^{\mathrm{T}}adjA(z)[A(z)M(z)+zB(z)N(z)]\\
&=\alpha^{\mathrm{T}}detA(z)M(z)-\beta^{\mathrm{T}}detA(z)N(z)\\
&=detA(z)[\alpha^{\mathrm{T}}M(z)-\beta^{\mathrm{T}}N(z)]\\
&\triangleq detA(z)\sum_{i=0}^{\lambda}(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}z^i
\end{aligned} \tag{10}$$

在式子(10)的两侧分别右乘$A(z), B(z)$, 则由(9)可得:

$$\alpha^{\mathrm{T}}=\sum_{i=0}^{\lambda}(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}z^iA(z) \tag{11}$$

$$-\beta^{\mathrm{T}}=\sum_{i=0}^{\lambda}(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}z^{i+1}B \tag{12}$$

根据假设4), $\begin{pmatrix}D & B\end{pmatrix}$是行满秩的, 因此对任何不是零向量的$\mu^{(i)}$, 有$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}D & B\end{pmatrix}\neq 0$ 成立. 如果$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}D\neq 0$, 则(11)的等号右边$z$的多项式的阶大于等于1, 而等号左边的阶为0, 产生了矛盾. 所以

$$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}D=0, \tag{13}$$

且有$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}B\neq 0$. 同样的方法分析(12), 可得

$$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}B=0. \tag{14}$$

由(13)和(14)知

$$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}D & B\end{pmatrix}=0.$$

这与$(\mu^{(i)})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}D & B\end{pmatrix}\neq 0$矛盾, 所以$\mu^{(i)}=0, i=0,\cdots,\lambda$. 再根据(11) 和(12), 可得$\alpha=0, \beta=0$. 又根据$\eta$的定义, 可以得到$||\eta||=||(\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}||=0$, 但这与前面的$||\eta||=1$矛盾. 说明假设不成立, 所以可以得到:

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1}\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}))>0, \quad a.s.$$

进而式子$\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}))\ge ct$是几乎处处成立的, 其中常数$c>0$. □

定理4.2. *如果假设1)-4)成立, 那么有*

$$\lambda_{\max}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}))=O(t),\ a.s.$$

证明. 令$\lambda_{\max}(t)=\lambda_{\max}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}))$. 由模型(2)可得,

$$X_{ns}(k)=D^kX_{ns}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}D^{k-1-i}BX_s(i).$$

根据注释4.1可知, 存在常数$\rho\in(0,1)$ 和$c_1>0$, 使得$||D^k||\le c_1\rho^k, \forall k\ge 0$. 则由上式和Schwarz不等式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{t}||X_{ns}(k)||^2\\
&\le\sum_{i=0}^{t}[2||X_{ns}(0)||^2c_1^2\rho^{2i}+2c_1^2(\sum_{j=0}^{i}\rho^{i-j-1}||BX_s(i)||)^2]\\
&\le 2c_1^2||X_{ns}(0)||^2\sum_{i=0}^{t}\rho^{2i}\\
&+2c_1^2\sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{i}\rho^{i-k-1}\sum_{j=0}^{i}\rho^{i-j-1}||BX_s(i)||^2\\
&\le c_2+c_3\sum_{j=0}^{t}||BX_s(i)||^2\\
&=O(\sum_{j=0}^{t}||X_s(i)||^2).
\end{aligned}$$

根据大数定律[8]及假设2), 我们有$\sum_{j=0}^{t}||X_s(i)||^2=O(t)$. 再根据$\lambda_{\max}(t)$的定义, 可以得到

$$\lambda_{\max}(t)=O(\sum_{i=0}^{t}||\varphi_i||^2)=O(t),\ a.s.$$

□

定理4.3. *如果假设1)-4)成立, 那么有*

$$||\theta - \theta_t||^2 \to 0 \quad a.s., \quad t \to \infty,$$

其中, θ是真实矩阵, θ_t 是系数矩阵的估计值.

证明. 根据定理4.1, 定理4.2和附录中的引理1, 可知

$$\begin{aligned}
&||\theta - \theta_t||^2 \\
&= \frac{\log(\lambda_{\max}(t)\{\log[\log(\lambda_{\max}(t))]\}^{\delta(\beta-2)}}{\lambda_{\min}\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})} \\
&< \frac{\log(c_1 t)[\log\log(c_1 t)]^{\delta(\beta-2)}}{ct},
\end{aligned}$$

因此, $||\theta - \theta_t||^2 \to 0, \ a.s.$ □

5 仿真

在本节中, 我们通过数值仿真来验证我们的理论分析结果. 我们做了如下的仿真, 证实了算法的有效性. 在这个仿真中, 网络中有4个节点, 其中有两个常规个体和两个信息源. 我们给定系数矩阵$D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$. 通过matlab编程, 我们用最小二乘法得到了系数矩阵的估计值. 我们使用NMSE(normalized mean square error, 归一化均方误差)来评估辨识的准确度. 其中NMSE的表达式如下:

$$\mathrm{NMSE} = ||\widehat{\theta} - \theta||^2/||\theta||^2.$$

我们的仿真结果展示在图1中. 从图1我们可以看到估计误差渐进趋于零, 这与我们的理论分析结果相符.

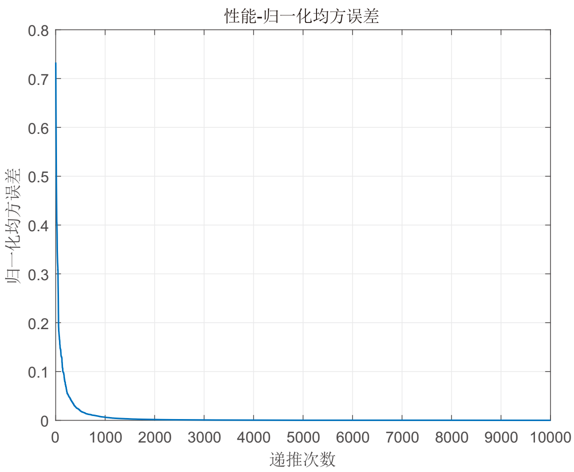

图 1: 估计归一化均方误差

6 结论

在本文中, 我们研究了基于French-DeGroot模型的社会网络系数矩阵的辨识问题. 我们使用最小二乘法完成辨识工作. 我们假设网络中存在信息源且所有常规个体都受到某个信息源的影响. 本文证明了最小二乘法的强一致性. 即在一定的假设条件下, 系数矩阵的估计值几乎处处收敛到真实矩阵. 本文所提出的方法只需要跟踪并记录社会网络中的个体对某一话题所持观点随时间的演化过程, 因此部分上弥补了现有方法的不足之处, 并且能帮助我们更好地理解社会网络中个体间的影响关系, 有实际的应用价值.

附录

首先，我们介绍最小二乘法. 引入多维线性回归模型:

$$y_{t+1} = \theta^{\mathrm{T}}\varphi_t + w_{t+1}, \ t \geq 0. \tag{15}$$

其中y_t是输出观测序列, θ是未知系数向量, $\theta^{\mathrm{T}} = (-A_1, \cdots, -A_p, B_1, \cdots, B_q)$, φ_t 是回归向量序列, $\varphi_t^{\mathrm{T}} = (y_n^{\mathrm{T}}, \cdots, y_{n-p+1}^{\mathrm{T}}, u_n^{\mathrm{T}}, \cdots, u_{n-q+1}^{\mathrm{T}})$, 满足$y_i = 0, \ u_i = 0, \ i < 0$. w_t 是量测噪声序列.

令$P_{t+1} = (\sum_{i=0}^{t}\phi_i\phi_i^{\mathrm{T}})^{-1}$, 则递推最小二乘法有如下形式:

$$\begin{aligned}
&P_{t+1} = P_t - a_t P_t \phi_t \phi_t^{\mathrm{T}} P_t \\
&a_t = (1 + \phi_t^{\mathrm{T}} P_t \phi_t)^{-1} \\
&\theta_{t+1} = \theta_t + a_t P_t \phi_t (y_{t+1} - \theta_t^{\mathrm{T}} \phi_t).
\end{aligned} \tag{16}$$

引理1 (文献[9]中的定理4.1). *假设下面的条件成立*
(1) 噪声序列$\{w_t, \mathcal{F}_t\}$是一鞅差序列(其中$\{\mathcal{F}_t\}$是一非降的子$\sigma-$代数序列), 且

$$\sup_{t\geq 0} E[||w_{t+1}||^{\beta}|F_t] \triangleq \sigma < \infty \quad a.s., \quad \beta \geq 2,$$

(2) u_t 是$\mathcal{F}_t$-可测的.
则

$$||\theta - \theta_t||^2 = O(\frac{\log(\lambda_{\max}(t))\{\log[\log(\lambda_{\max}(t))]\}^{\delta(\beta-2)}}{\lambda_{\min}(\sum_{i=0}^{t}(\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}))}) \quad a.s.$$

其中, $\delta(x) = 0, x \neq 0; \delta(x) = c, x = 0, c > 1$, θ是真实值, θ_t 是估计值.

引理2 (文献[10]中的引理4). *对于一个次随机的矩阵$D \in R^{n\times n}$, 如果对每个i, $1 \leq i \leq n$, 存在一个整数j, $1 \leq i \leq n$, 满足第j 行的行和小于1, 和一个两两不同的整数序列$k_1 = i, k_2, \cdots, k_m = j, 1 \leq m \leq n$, 使得$d_{k_1k_2}d_{k_2k_3}\cdots d_{k_{m-1}k_m} > 0$ 成立, 则$\rho(D) < 1$.*

定理1 (文献[9]中的定理2.8). *设$\{X_k, \mathcal{F}_k\}$为矩阵鞅差序列, $\{M_k, \mathcal{F}_k\}$为随机矩阵$||M_k|| < \infty, \ a.s. \ \forall k \geq 0$的适应序列. 设对某个$\alpha \in (0, 2]$,*

$$\sup_k E[||X_{k+1}||^{\alpha}|\mathcal{F}_k] < \infty, \quad a.s.,$$

那么若记$s_k(\alpha) = (\sum_{i=0}^{k}||M_i||^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$, 当$n \to \infty$时, 有

$$\sum_{i=0}^{k} M_i X_{i+1} = O(s_k(\alpha)\log^{\frac{1}{\alpha}+\eta}(s_k^{\alpha}(\alpha)+e)), \quad a.s. \quad \forall\eta > 0.$$

参考文献

[1] D. Easley, J. Kleinberg, *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world[M]*. Cambridge University Press, 2010.

[2] A. V. Proskurnikov and R. Tempo, A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks.part 1, *Annual Reviews in Control*, 43: 65-79, 2017.

[3] R. Abelson, Mathematical mosels of the distribution of attitudes under controversy, *Contributions to Mathematical Psychology*, 142-160, 1964.

[4] N. Friedkin, The problem of social control and coordination of complex systems in sociology: A look at the community cleavage problem, *IEEE Control Syst.Mag.*, 35(3): 40-51, 2015.

[5] H. Wai, A. Scaglione and A. Leshem, Active Sensing of Social Networks, *IEEE Transactions on Signal & Information Processing Over Networks*, 2(3): 406-419, 2017.

[6] C. Ravazzi, R. Tempo and F. Dabbene, Learning influence structure in sparse social networks, *IEEE Transactions on Control of Network Systems* (99): 1-1, 2017.

[7] S. Segarra, M.T. Schaub, A. Jadbabaie, Network Inference from Consensus Dynamics, *IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control*, 3212-3217, 2017.

[8] 胡晓予. 高等概率论. 北京: 科学出版社, 2009.

[9] H. F. Chen and L. Guo, *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Boston, MA: Birkhauser, 1991.

[10] P. Frasca, C. Ravazzi, R. Tempo and H. Ishii, Gossips and Prejudices: Ergodic Randomized Dynamics in Social Networks, *IFAC Proceedings Volumes*, 46 (27) : 212-219, 2013.